

2024

MATHEMATICS

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, find the value of

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}.$$

যদি $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$ অৰ মান

উলিওৱা।

(b) State whether the statement is true or false, "The absolute value of a continuous function is continuous."

“অবিচ্ছিন্ন ফলন এটোৰ পৰম মানৰ ফলনটোত অবিচ্ছিন্ন।”
উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা।

(c) Write the Maclaurin's series for e^x .
 e^x -অৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

(d) Can the intermediate value theorem be used to determine the number of roots within an interval?

এটা অন্তৰালত ধকা মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিবলৈ
Intermediate value theorem ব্যৱহাৰ কৰিব
পাৰি নে?

(e) What is the n th derivative of x^n ?
 x^n -অৰ n -তম অৱকলনজটো কি?

(f) Write the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$ -ৰ মান লিখা।

(g) Write the domain of the function
 $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

$f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ ফলনটোৰ
আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

(h) What is the slope of the surface $z = xy^2$ in the x -direction at the point (2, 3)?
 $z = xy^2$ পৃষ্ঠৰ (2, 3) বিন্দুত x -অৰ দিশত প্ৰৱণতা
কিমান?

2. Answer any six questions : 2×6=12

যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find (মান উলিওৱা) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 - 5}$

(b) If the function $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x+k & , x > 2 \end{cases}$ is continuous everywhere, then find the value of k .

যদি $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x+k & , x > 2 \end{cases}$ ফলনটো সদায়েই

অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে k -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) State the squeezing theorem for the functions f , g and h .
 f , g আৰু h ফলনৰ বাবে স্ক্ৰিচিং উপপাদ্যটো লিখা।

(d) If (যদি) $y = e^{a \sin^{-1} x}$, prove that (প্রমাণ কৰা যে)
 $(1-x^2)^2 y_2 - xy_1 - ay^2 = 0$

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

(f) Verify Rolle's theorem for the function
 $f(x) = x^2 + 1$ in the interval $[-1, 1]$.

$f(x) = x^2 + 1$ ফলনৰ $[-1, 1]$ অন্তৰালত ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

(g) If $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, find $\frac{\partial w}{\partial x}$ and $\frac{\partial w}{\partial y}$ at point $(2, 1, -1)$.

যদি $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$, $(2, 1, -1)$ বিন্দুত $\frac{\partial w}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial w}{\partial y}$ অৰ মান উলিওৱা।

(h) Define homogeneous function. State Euler's theorem on homogeneous function.
 1+1=2
 সূৰ্যম ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। সূৰ্যম ফলনৰ বাবে ইউলাৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(i) If $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$, find $\frac{d^3 f}{dx^3}$ when $x = 0$.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$ ফলনৰ $x = 0$ বিন্দুত

$\frac{d^3 f}{dx^3}$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(j) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x), x > 0$$

3. Answer any four questions : 5x4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$$

(ii) Show that (দেখুওবা যে)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \frac{1}{2}$$

3

(b) If $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

show that f is not derivable at $x = 0$.

$$\text{যদি } f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

দেখুওবা যে $x = 0$ বিন্দুত f ফলনটো অককলনীয় নহয়।

(c) State and prove Leibnitz theorem. $1+4=5$

লীবনিজৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$, show that

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$$

যদি $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$ হয়, দেখুওবা যে

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$$

(e) Expand $\log(1+x)$ by Maclaurin's theorem.

মেক্‌ল'বিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\log(1+x)$ ক বিস্তাৰিত কৰা।

(f) Write Taylor's polynomial for a function f . Find the n th Taylor's polynomial for $\frac{1}{x}$ and express it in sigma notation. $2+2+1=5$

ফলন f -ৰ বাবে টয়লাৰছৰ বহুপদ ৰাশিটো লিখা। $\frac{1}{x}$ অৰ বাবে টয়লাৰছৰ n তম বহুপদ ৰাশিটো লিখা আৰু ইয়াক ছিগমাৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(g) Sketch the level surface of

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ফলনটোৰ পৃষ্ঠৰ অংকন কৰা।

(h) If $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, show that

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

যদি $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, তেজ দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

4. Answer any two of the following questions :
 $10 \times 2 = 20$

তলৰ প্ৰশ্নৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া : 5

(a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : 5

(1) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x - x})$

(ii) If the function

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

is continuous everywhere, then find the values of the constants a and b . 5

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হলে a আৰু b -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Obtain the reduction formula for $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Using it evaluate—

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$

$6+2+2=10$

কৰি মান উলিওৱা :
 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ -ৰ হ্রাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। ইয়াৰ ব্যৱহাৰ

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$

(c) State and prove Lagrange's Mean value theorem. What is its geometrical interpretation? Verify mean value theorem for function

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ in $[0, \frac{1}{2}]$.
 $1+4+2+3=10$

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।
ইয়াৰ ভৌতিক অৰ্থ কি? $f(x) = x(x-1)(x-2)$
ফলনটোৰ $[0, \frac{1}{2}]$ অন্তৰ্ভাগত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা
পৰীক্ষা কৰা।

(d) (i) Prove that if a function f is
differentiable at x_0 , then f is
continuous at x_0 . Is converse of
the theorem true?
3+1=4

প্ৰমাণ কৰা যে ফলন f , x_0 বিন্দুত অৱফলনীয়
হলে f ফলনটো x_0 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।
উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত উক্তিটো সঁচা নে?

(ii) For $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, show that

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is odd} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

6

$y = \cos(m \sin^{-1} x)$ -ৰ কাৰণে দেখুওৱা যে,

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{যদি } n \text{ অসুখ হয়} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{যদি } n \text{ সুখ হয়।} \end{cases}$$

(e) (i)

Let $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$.
Find $f(e, 0)$ and sketch the natural
domain of f .
1+4=5

ধৰা হলে $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$ ।
 $f(e, 0)$ মান নিৰ্ণয় কৰা আৰু f ফলনটোৰ
স্বাভাৱিক আদিক্ৰম অংকন কৰা।

(ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,

show that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$

5

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$,
দেখুওৱা যে $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$

